SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. NEGRINI

# PUNTI REGOLARI PER IL PROBLEMA GENERALIZZATO DI DIRICHLET NEGLI SPAZI ARMONICI

10 GIUGNO 1982

INTRODUZIONE

Sia X un aperto di $R^n$; sia $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} +$
$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ un operatore ellittico-parabolico definito in X. Se L soddisfa alcune ipotesi, è possibile applicare il metodo di Perron e Wiener, per associare ad ogni aperto limitato $\Omega$, con $\overline{\Omega} \subseteq X$, e ad ogni funzione $\phi \in C(\partial\Omega)$, una "soluzione generalizzata", ${}^{L}H_{\phi}^{\Omega}$ del problema di Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

La funzione $u = {}^{L}H_{\phi}^{\Omega}$ così ottenuta, soddisfa, in qualche senso, l'equazione differenziale in $\Omega$; mentre non si sa nulla, in generale, riguardo il suo comportamento sul bordo.

Diremo che un punto $x_0 \in \partial\Omega$ è L-regolare per $\Omega$ se, per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$ si ha che:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} {}^{L}H_{\phi}^{\Omega}(x) = \phi(x_0)$$

(quindi, $\Omega$ è un aperto L-regolare se tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari per $\Omega$). Sorge così il problema di determinare, dato un qualunque aperto limitato $\Omega$, i punti L-regolari di $\Omega$.

Quando $L = \Delta$ (operatore di Laplace), i punti regolari sono sta

ti caratterizzati da Wiener, facendo uso del concetto di "capacità" ([14], [15]); in [8] (Littman-Stampacchia-Weinberger), la questione è risolta per gli operatori ellittici: si prova infatti che:

se L è un operatore uniformemente ellittico a coefficienti misurabili e limitati i punti L-regolari per $\Omega$ e i punti $\Delta$-regolari per $\Omega$ sono gli stessi.

Per quanto riguarda gli operatori parabolici, Landis ([7]) ha caratterizzato i punti regolari relativamente all'operatore del calore; Lanconelli ([6]) ha provato l'equivalenza fra la regolarità di un punto per una certa classe di operatori parabolici, e la regolarità per tutti gli operatori della forma $a\,\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ $(a > 0)$.

Un altro tipo di approccio a questo problema si incontra, per esempio, in [13], in cui Tychonov dimostra che, posto $O = \Omega \times ]0,T[$, con $\Omega$ aperto limitato di $R^n$, l'aperto $\Omega$ è $\Delta$-regolare se e solo se i punti di $\partial\Omega \times ]0,T[$ sono regolari per $O$ relativamente all'operatore del calore.

Questo confronto fra la regolarità dei punti "laterali" di un aperto di tipo cilindrico in $R^{n+1}$ rispetto ad un operatore parabolico, e la regolarità dei punti di frontiera della "base" rispetto all'operatore ellittico corrispondente è ripreso, in casi più generali, da Fulks ([5]), Chan & Young ([3]).

In [9], questo tipo di risultato viene dimostrato in un ambiente astratto: indicati con X, e $Y = X \times ]a,b[$ due spazi $\beta$-armonici (la definizione sarà precisata nel seguito), con $\Omega$ un aperto relativamente compatto $\subseteq X$, con $O$ l'aperto $\Omega \times ]0,T[ \subseteq Y$, si prova che, se X e Y soddisfano opportune ipotesi,

sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) $x_0 \in \partial\Omega$ è regolare per $\Omega$

ii) $(x_0,t)$ è regolare per $O$ per ogni $t \in ]0,T[$ (o per un $t \in ]0,T[$).

Da questo teorema astratto si ottengono, come applicazioni, risultati relativi ad un'ampia classe di operatori differenziali del secon

do ordine, di tipo ellittico-parabolico.

Si ritrovano alcuni risultati noti, tra cui quello di Tychonov ([13]) citato prima; ma anche alcune applicazioni originali. In particolare, si ottiene che:

se $\Omega$ è un aperto limitato di $R^2$, indicati rispettivamente con L e M gli operatori:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{(parabolico degenere)}$$

$$M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{(operatore di Kolmogorov);}$$

con 0 l'aperto $\Omega \times ]0,T[ \subseteq R^3$, e con $(x_0, y_0)$ un punto di $\partial\Omega$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

a) $(x_0, y_0)$ è L-regolare per $\Omega$

b) $(x_0, y_0, t)$ è M-regolare per 0 per ogni t (o per un t) $\in ]0,T[$.

A causa della complicata espressione della soluzione fondamentale (cfr., per esempio, [11]), lo studio diretto dell'operatore L presenta notevoli difficoltà. Sfruttando risultati noti riguardo all'operatore di Kolmogorov (in particolare, Scornazzani [12] dà una caratterizzazione geometrica dei punti M-regolari per aperto di $R^3$, ed alcune condizioni sufficienti di regolarità), si trovano criteri di L-regolarità dei punti di $\partial\Omega$.

E' interessante notare che, in questo caso, si applica la implicazione ii) $\Rightarrow$ i) della equivalenza riportata a pag. 2; cioè, da risultati noti riguardo all'operatore in dimensione superiore, se ne deducono altri, relativi all'operatore in dimensione inferiore.

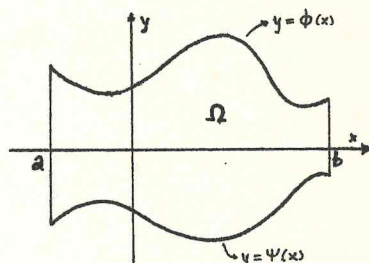
I risultati più interessanti si hanno quando l'aperto $\Omega \subseteq R^2$ è tale che $\partial\Omega$ contiene punti con ascissa nulla: per i punti $(x_0,y_0) \in \partial\Omega$

con $x_o \neq 0$ si possono infatti sfruttare criteri già noti di regolarità, relativi agli operatori parabolici.

Consideriamo, per esempio, un aperto della forma:

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 : a < x < b ; \psi(x) < y < \phi(x)\}$$

con $a < 0 < b$ ;

$\psi, \phi \in C^3([a,b], R)$.

Applicando il teorema (3.3) di [12], e il teorema 4 di [9], si ottiene che:

se $\phi'(o) \neq 0$, oppure $\phi'(o) = 0$ e $\phi''(o) \leqq 0$ allora il punto $(o,\phi(o))$ è L-regolare per $\Omega$;
se $\psi'(o) \neq 0$, oppure $\psi'(o) = 0$ e $\psi''(o) \geqq 0$ allora il punto $(o,\psi(o))$ è L-regolare per $\Omega$.

## § 1. ALCUNE DEFINIZIONI

Le definizioni alle quali ci riferiremo sono essenzialmente riprese da [4].

Sia X uno spazio topologico localmente compatto, con base numerabile. Un fascio di funzioni su X, $\mathcal{U}$, si dice "*fascio iperarmonico*" se, per ogni aperto $U \subseteq X$, $\mathcal{U}(U)$ è un cono convesso di funzioni inferiormente semicontinue da U a $R \cup \{+\infty\}$.

La corrispondenza

$$U \to \mathcal{U}(U) \cap (-\mathcal{U}(U)) = \mathcal{H}(U)$$

risulta un *fascio armonico* $H$, su X.

Le funzioni $f \in U(U)$ si dicono "*funzioni iperarmoniche*"; le funzioni $f \in H(U)$ si dicono "*funzioni armoniche*" (sull'aperto U).

Rispetto a queste funzioni armoniche, si può introdurre il problema generalizzato di Dirichlet, e si possono definire gli aperti regolari (vedi Seminario Lanconelli).

Una funzione $u \in U(X)$ si dice *superarmonica* se, per ogni aperto regolare $V \subseteq X$, si ha $\mu^V u \in H(V)$ (con $\mu^V u$ denotiamo la funzione che in ciascun punto x V vale: $\int_{\partial V} u \, d\mu_x^V$).

La famiglia delle funzioni superarmoniche su X si denota con $S(X)$; con $S^+(X)$ indichiamo la famiglia delle funzioni superarmoniche $\geq 0$.

Diremo che lo spazio topologico X, dotato del fascio iperarmonico $U$ è uno

*spazio β-armonico*

se soddisfa i seguenti quattro assiomi:

a. $H$ è non degenere in ogni punto di X (cioè, $\forall\ x \in X\ \exists V$ aperto regolare, $\exists h \in H(V)$, tali che: $x \in V$ e $h(x) \neq 0$).

b. Gli aperti regolari costituiscono una base per X.

c. $H$ ha la proprietà di convergenza di Bauer (cioè, per ogni aperto $\Omega \subseteq X$, e per ogni successione $(f_n)$ in $H(\Omega)$, si ha che:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall\ x \in \Omega\ , \quad \forall n \in N \\ f(x) = \sup\{f_n(x),\ n \in N\} \text{ loc. limitata in } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow f \in H(\Omega)) \ .$$

d. $S^+(X)$ separa i punti di X

(cioè, $\forall\ x,y \in X\ (x \neq y \Rightarrow \exists u,\ v \in S^+(X)\colon u(x)\ v(y) \neq u(y)\ v(x))$).

Se $\Omega \subseteq X$ è un aperto, e X è uno spazio β-armonico, definiamo $H^*(\Omega)$ ponendo; per ogni $u\colon \Omega \to R \cup \{+\infty\}$,

$$u \in H^*(\Omega) \Leftrightarrow \forall V (V \text{ aperto regolare, e } \overline{V} \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^V u \leq u) \ .$$

$H^*$ così definito risulta essere un fascio iperarmonico, e coincide con $U$.

Chiamiamo $H_* = - H^*$. Le funzioni di $H_*$ si chiamano *ipoarmoniche*.

Come conseguenze della definizione di "spazio β-armonico" ora data si ha, fra l'altro, che:

1. ogni aperto $V \subseteq X$ è di tipo MP ([4], corollario 2.3.3.);
2. ogni aperto $V \subseteq X$ è risolutivo.

Sia $\Omega \subseteq X$ un aperto, e $y \in \partial\Omega$. Se $V$ è un intorno aperto di $y$, e $u$ $H^*(V \cap \Omega)$, si dice che $u$ è una *barriera per* $\Omega$ *in* $y$, se:

1. $u(x) > 0 \quad \forall\, x \in \Omega \cap V$;
2. $\lim_{\Omega \cap V \ni x \to y} u(x) = 0.$

Le funzioni-barriera caratterizzano i punti regolari di $\partial\Omega$, in base al seguente teorema:

Teorema di Bouligand: $y$ $\partial\Omega$ *è regolare per* $\Omega$ *se e solo se esiste una barriera per* $\Omega$ *in* $y$ ([1], Satz 4.3.3).

La tecnica che useremo per provare che certi punti di frontiera di aperti sono regolari per l'aperto considerato sarà proprio quella di costruire barriere.

## § 2. IL TEOREMA PRINCIPALE

Sia $X$ uno spazio β-armonico; sia $H$ il relativo fascio armonico. Sia $]a,b[$ un intervallo aperto di $R$, e $Y = X \times ]a,b[$, con la topologia prodotto di quella di $X$ e quella naturale di $]a,b[$.

Sia assegnata in $Y$ una struttura di spazio β-armonico, e sia $K$ il relativo fascio armonico.

Supponiamo, per semplicità, che per un $T > 0$ risulti $[0,T] \subseteq ]a,b[$.

Sia $\Omega$ un aperto, $\Omega \subseteq X$, $\Omega$ relativamente compatto; definiamo $O = \Omega \times ]0,T[ \subseteq Y$.

Supponiamo che gli spazi X e Y siano fra loro legati dalle seguenti condizioni:

1. Per ogni $\Omega \subseteq X$, per ogni $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ risulta $u \otimes 1 \in \mathcal{K}(O)$.

2. Per ogni $\Omega \subseteq X$, se $v \in \mathcal{K}(O)$, e se per ogni $x \in \Omega$ la funzione

$$]0,T[ \ni t \to v(x,t)$$

è non crescente, allora, per ogni fissato $t \in ]0,T[$ la funzione $v(\cdot,t) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$.

Queste due condizioni, come le seguenti, sono formulate seguendo il modello "concreto" delle condizioni a cui soddisfano due spazi $X = R^n$, $Y = R^n \times ]a,b[$, in cui le strutture di spazio armonico sono generate, rispettivamente, da un operatore ellittico-parabolico L avente opportune proprietà, e dall'operatore $M = L - \frac{\partial}{\partial t}$.

Le condizioni 1 e 2 riescono allora abbastanza naturali, ricordando che, se per un operatore L ellittico-parabolico vale un principio di minimo, allora le funzioni armoniche (rispettivamente: iperarmoniche) di classe $C^2$ sono, relativamente a L, quelle u tali che $Lu = 0$ $(Lu \leq 0)$.

Supponiamo inoltre che:

3. Per ogni $z \in X$ $\exists W$ intorno aperto di z tale che, $\forall x \in W$ $\exists h \in \mathcal{H}(W)$, $h > 0$, $\exists u \in \mathcal{H}^*(W)$ tali che $u(z)\, h(x) > u(x)\, h(z)$.

Questa ipotesi assicura l'esistenza di una barriera *armonica* in ogni punto regolare, in X ([1], teorema 4.3.8). Essa è verificata,

per esempio, se:

$\forall z \in X\ \exists W$ intorno aperto di $z$, $\exists\ \sigma \in H_*(W)$ tale che $\sigma(z) = 0$, $\sigma(\xi) > 0$ $\forall \xi \in W - \{z\}$ (le funzioni h e u della condizione 3 sono, rispettivamente, una funzione armonica $h > 0$ definita in W, o in un eventuale intorno più piccolo, di z, e $(-\sigma)$).

Sarà quest'ultima la condizione che verificheremo nelle applicazioni, anziché la 3.

4. Per ogni aperto $V \subseteq Y$, per ogni $\hat{y} = (\hat{x},\hat{t}) \in V$, il supporto della misura armonica $\mu_{\hat{y}}^{V}$ è contenuto nell'insieme:

$$A_{\hat{t}} = \{y = (x,t) \in Y \mid t \leq \hat{t}\}.$$

5. Per ogni aperto $V \subseteq Y$, per ogni $\delta \in R$ tale che:

$${}^{\delta}V \equiv \{(x,t-\delta);\ (x,t) \in V\} \subseteq Y$$

e per ogni $u \in K(V)$, la funzione

$${}^{\delta}V \ni (x,t) \rightarrow u(x,t+\delta)$$

è $K$-armonica in ${}^{\delta}V$ (nel caso concreto, questa ipotesi corrisponde a scegliere operatori i cui coefficienti non dipendono da t).

6. Per ogni $(x_o,t_o) \in X \times ]0,T[$ esistono un intorno W di $x_o$ in X e una funzione $\Phi \in C(\overline{W} \times ]0,T[)$, $K$-ipoarmonica in $W \times ]0,T[$, tale che:

i) $\Phi(x,t) \geq 0 \quad \forall (x,t) \in W \times ]0,T[$ con $x \neq x_o$; $\Phi(x_o,t_o) = 0$;

ii) $\forall x \in W$ la funzione

$$]0,T[\ \ni t \rightarrow \Phi(x,t)$$

è non crescente su $]0,T[$.

<u>Teorema</u>. Supponiamo che siano soddisfatte dagli spazi X e Y le condizioni 1-6. Siano $\Omega \subseteq X$ un aperto relativamente compatto, $x_0 \in \partial\Omega$ e $O = \Omega \times ]0,T[$.

Sono equivalenti le seguente affermazioni:

a. $x_0$ è *H*-regolare per $\Omega$.

b. $\forall t \in ]0,T[$, $(x_0,t)$ è *K*-regolare per $O$.

c. $\exists t_0 \in ]0,T[$: $(x_0,t_0)$ è *K*-regolare per $O$.

<u>Dimostrazione</u>.

a. $\Rightarrow$ b. Se $x_0$ è regolare per $\Omega$ esiste, in conseguenza dell'ipotesi 3 una *H*-barriera *H*-armonica b per $\Omega$ in $x_0$. La funzione $b \otimes 1$, in base all'ipotesi 1, risulta una *K*-barriera per $O$ nei punti $(x_0,t)$, i quali sono dunque *K*-regolari per $O$.

Notiamo che, per questa parte della dimostrazione, sono sufficienti le ipotesi 1 e 3.

b. $\Rightarrow$ c. E' ovvio.

c. $\Rightarrow$ a. Sia $(x_0,t_0)$ *K*-regolare per $O$. Si può supporre, senza perdere in generalità, che $\exists$ U aperto $\subseteq X$, con $\overline{\Omega} \subseteq U$, e $h \in H(U)$, $h > 0$ in U. Sia

$$m = \min\{h(x),\ x \in \overline{\Omega}\} \quad (\overline{\Omega} \text{ è compatto})$$

e sia $\Phi$ la funzione dell'ipotesi 6, che possiamo supporre definita su tutto $\overline{O}$. Sia

$$M = \max\{\Phi(x,t);\ (x,t) \in \overline{O}\}.$$

Fissiamo $\varepsilon \in ]0,t_0[$, e definiamo $\hat{\Phi}$: $O \to R$, ponendo:

$$\hat{\Phi}(x,t) = \begin{cases} \Phi(x,t) & \text{se } t > \varepsilon \\ \frac{M}{m} h(x) & \text{se } t \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Si verifica che la funzione $\hat{\Phi}$ è $K$-ipoarmonica in 0; essa è, inoltre, strettamente positiva in 0 ed è tale che: $\lim_{0 \ni (x,t) \to (x_0,t_0)} \hat{\Phi}(x,t) = 0.$

Poniamo:

$$\phi = \hat{\Phi}|_{\partial 0} \quad ; \quad w = K_\phi^0$$

(w è la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet relativo allo spazio armonico Y, sull'aperto 0, con dato sul bordo $\phi$).

Facendo uso delle ipotesi e applicando il principio di minimo per le funzioni $K$-iperarmoniche, si dimostra che la funzione w, la quale, per costruzione, è $K$-armonica, è non crescente nella variabile t.

Allora, per l'ipotesi 2, se si pone

$$\beta(x) = w(x,t_0) \quad \forall x \in \Omega$$

si ha che $\beta \in H^*(\Omega)$. D'altra parte, poiché risulta $\hat{\Phi} \in {}^{K}\underline{\mathcal{U}}_{\phi}^{0}$, si ha $\hat{\phi} \leqq w$ in 0; poiché $\hat{\Phi}$ è strettamente positiva in 0, $\beta$ risulta strettamente positiva in $\Omega$; e poiché $(x_0,t_0)$ è $K$-regolare per 0, si ha:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} \beta(x) = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} w(x,t_0) = \phi(x_0,t_0) = 0$$

perciò, $\beta$ è una $H$-barriera per $\Omega$ in $x_0$, e $x_0$ è, dunque, $H$-regolare per $\Omega$.

## § 3. APPLICAZIONI

Diamo qui una applicazione del risultato stabilito ad una classe di operatori ellittico-parabolici: come caso particolare, otterremo i

risultati citati all'inizio, relativi agli operatori

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial y} \quad e \quad M = L - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Sia A un aperto di $R^n$; sia L l'operatore:

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u(x)$$

Supponiamo che:

i) $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(A,R)$; $a_{ij} = a_{j,i}$ per $i,j \in \{1,2...n\}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqq 0 \quad \forall \xi = (\xi_1...\xi_n) \in R^n, \ \forall x \in A$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)| > 0 \quad \forall x \in A.$$

ii) L'algebra di Lie generata dagli operatori

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad k \in \{1,2...n\}$$

$$X_o = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

abbia rango n in ogni punto di A (questa condizione assicura che L è ipoellittico; cfr. [10]).

iii) $\exists \omega \in C^2(A,R)$: $\omega > 0$ e $L\omega < 0$ in A (questa condizione serve per avere il principio di minimo).

Sia X un aperto limitato di $R^n$, con $\overline{X} \subseteq A$.

Per ogni aperto $\Omega \subseteq X$, sia ${}^L H(\Omega)$ l'insieme delle funzioni

$u \in C^\infty(\Omega)$ tali che $Lu = 0$ in $\Omega$; allora, ${}^L H$ è un *fascio armonico* in X.

Ricordando che, se V è un aperto $\subseteq X$ con frontiera non caratteristica per L, allora V è regolare per L (cfr. [2]), si costruisce, seguendo [2] una base di aperti per X ${}^L H$-regolari, nel modo seguente: sia $x_o \in X$. Allora, $\exists \bar{\nu} \in R^n$, $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2 \ldots \bar{\nu}_n)$, tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_o)\, \bar{\nu}_i\, \bar{\nu}_j > 0 .$$

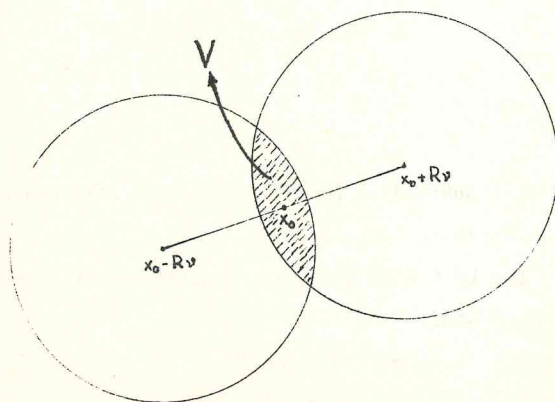
Per continuità, esistono un intorno P di $x_o$ in X, e un cono C di asse $\bar{\nu}$ in $R^n$, tali che per ogni $(x,\nu) \in P \times C$ si ha

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \nu_i\, \nu_j > 0.$$

Possiamo supporre $\| \bar{\nu} \| = 1$.

Fissati $R > 0$, $\delta > 0$, sia V l'insieme:

$$V = S(x_o + R\nu,\ R + \delta) \cap S(x_o - R\nu,\ R + \delta)$$

V è un intorno di $x_o$; inoltre, se scegliamo R sufficientemente grande,

e $\delta$ sufficientemente piccolo, V è contenuto in P, e inoltre ciascun punto di $\partial V$ ha una normale esterna appartenente a C, quindi, non caratteristica; dunque, V è ${}^{L}H$-regolare; è chiaro, infine, che gli aperti V così definiti costituiscono una base di intorni di $x_o$.

Se $V \subseteq X$ è un aperto ${}^{L}H$-regolare e $\phi \in C(\partial V)$, chiamiamo ${}^{L}H_{\phi}^{V}$ la soluzione (che esiste ed è unica) del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } V \\ u|_{\partial V} = \phi . \end{cases}$$

Se $\Omega \subseteq X$, e $u: \Omega \to R \cup \{+\infty\}$, diremo che u è $H$-iperarmonica in $\Omega$ ($u \in H^*(\Omega)$) se u è inferiormente semicontinua, e se per ogni aperto regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ risulta

$$u(x) \geq \int_{\partial V} u \, d\mu_x^V \qquad \forall x \in V.$$

Si riconosce allora che $\Omega \to H^*(\Omega)$ è un fascio iperarmonico, che dà a X la struttura di *spazio* $\beta$-*armonico* (l'assioma di convergenza di Bauer è conseguenza del fatto che, in questo caso, le funzioni armoniche sono di classe $C^{\infty}$; per dimostrare la validità dell'assioma d) di separazione, si può costruire, a partire dalla funzione $\omega$ dell'ipotesi iii), la coppia di funzioni $u,v \in S^{+}(X)$ che separano due prefissati punti $x,y \in X$, $x \neq y$).

Sia ora M l'operatore definito in $A \times R$,

$$M = L - \frac{\partial}{\partial t}$$

(indichiamo i punti di $A \times R$ con $y = (x,t) = (x_1,x_2 \ldots x_n,t)$).

Supponiamo che:

ii') L'algebra di Lie generata dagli operatori $X_1,X_2 \ldots X_n$, $X_o - \frac{\partial}{\partial t}$ abbia

rango n+1 in ogni punto di A.

Osserviamo che questa condizione implica la ii); inoltre, se $\omega$ è la funzione di iii), risulta $M\omega = L\omega < 0$.

Sia $]a,b[ \subseteq R$ un intervallo limitato; sia $Y = X \times ]a,b[$; forniamo a Y una struttura di spazio $\beta$-armonico, con il medesimo procedimento spiegato più sopra.

Indichiamo con $M_K$ il fascio armonico delle soluzioni dell'equazione $Mu = 0$; chiameremo queste ultime *funzioni K-armoniche*.

Si dimostra che gli spazi X e Y soddisfano le ipotesi 1-6.

Le condizioni 1 e 2 sono soddisfatte, perché le funzioni ${}^L H$- e ${}^M K$-armoniche sono di classe $C^\infty$, e le funzioni $u \in C^2(\Omega)$ tali che $Lu \leq 0$ sono $H$-iperarmoniche, in virtù del principio di minimo classico.

La condizione 3 è verificata, perché, ad esempio, preso $x_0$ X, la funzione

$$(*) \qquad \sigma(x) = \exp(\|x - x_0\|^2) - 1$$

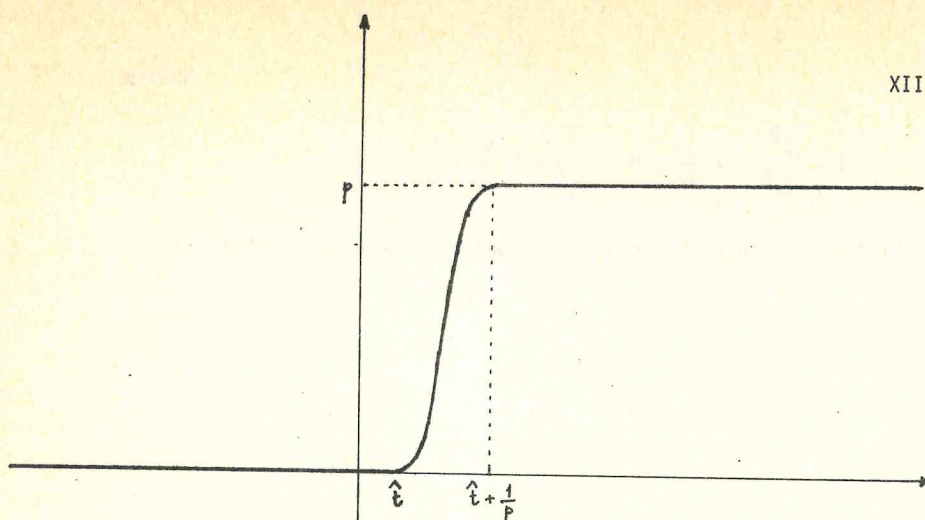
soddisfa le condizioni che assicurano il verificarsi di (3).

Per verificare la condizione 4, prendiamo $\hat{t} \in ]a,b[$, e una successione di funzioni $(\phi_p)_{p\in N}$, $\phi_p \in C^\infty(R,R)$, non decrescenti, e tali che:

$$\phi_p(t) \geq 0 \quad \forall t \in R, \quad \forall p \in N$$

$$\phi_p(t) = 0 \quad \forall t \leq \hat{t}$$

$$\phi_p(t) \leq \phi_{p+1}(t) \quad \forall t \in R, \quad \forall p \in N$$

$$\phi_p(t) = p \quad \forall t \geq \hat{t} + \frac{1}{p}$$

Le funzioni $\upsilon_p : Y \to R$, $\upsilon_p = 1 \otimes \phi_p$ sono $K$-iperarmoniche, essendo $M\, \upsilon_p = -\, \phi'_p \leqq 0$; perciò, anche la funzione

$$\upsilon(x,t) = \sup\{\upsilon_p(x,t);\ p \in N\}$$

è $K$-iperarmonica. D'altra parte, $\upsilon$ vale 0 in $A_{\hat{t}}$, $+\infty$ in $Y - A_{\hat{t}}$; quindi, per definizione ([4], cap. 6), $A_{\hat{t}}$ è $K$-assorbente; questo equivale alla nostra condizione 4 ([4], proposizione 6.1.1).

La ipotesi 5 è soddisfatta perché i coefficienti di M non dipendono da t.

La condizione 6, infine, è soddisfatta dalla funzione $\Phi = \sigma \otimes 1$, essendo $\sigma$ la funzione (*) di pag. 14.

Per gli operatori L e M aventi le proprietà sopra dichiarate vale dunque il seguente

<u>Teorema</u>. Siano $\Omega$ un aperto limitato $\subseteq X$, $x_0 \in \partial\Omega$, $T \in R^+$, $0 = \Omega \times ]0,T[$. Allora, $x_0$ è L-regolare per $\Omega$ se e solo se $(x_0,t)$ è M-regolare per 0 per ogni t (o per un t) $\in ]0,T[$.

Prendendo ora

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} \; ; \; M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$$

si ottiene, come caso particolare, l'applicazione esposta all'inizio.

## BIBLIOGRAFIA

[1] H. BAUER: "Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie" Lecture Notes in Mathematics, n. 22, Springer Verlag 1966.

[2] J.M. BONY: "Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du probléme du Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés". Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19, I (1969), 277-304.

[3] C.Y. CHAN & E.C. YOUNG: "Regular Regions for Parabolic and Elliptic Equations" Portugaliae Mathematica, vol. 36, Fasc. 1, 1977, 7-12.

[4] C. CONSTANTINESCU & A. CORNEA: "Potential Theory on Harmonic Spaces", Springer Verlag, Berlin 1972.

[5] W. FULKS: "Regular Regions for the Heat Equation", Pacific J. Math. 7 (1957), 867-877.

[6] E. LANCONELLI: "Sul confronto della regolarità dei punti di frontiera rispetto ad operatori lineari parabolici diversi", Ann. Mat. Pura e Appl. (IV) vol. CXIV, 207-227.

[7] E.M. LANDIS: "Necessary and Sufficient Conditions for regularity of a boundary point in the Dirichlet problem for the heat conduction equation" D.A.N. S.S.S.R. 185 (1969).

[8] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA & H.F. WEINBERGER: "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients", Ann. S.N.S. Pisa 17 (1963), 43-77.

[9] P. NEGRINI: "Punti regolari per aperti cilindrici in uno spazio β-armonico". In corso di stampa sul Bollettino della Unione Matematica Italiana.

[10] O. OLEINIK & E.V. RADKEWITCH: "Second order equations with nonnegative characteristic form" Providence, Amer. Math. Soc., 1973.

[11] C.D. PAGANI: "Su un problema di valori iniziali per una equazione parabolica singolare", Rend. Sc. Ist. Lombardo A 103 (1969), 618-653.

[12] V. SCORNAZZANI: "Sul problema di Dirichlet per l'operatore di Kolmogorov", Boll. U.M.I., Suppl. An. Funz. e Appl. Serie V vol. XVIII-C n. 1-1981; 43-62.

[13] A. TYCHONOV: "Sur l'equation de la chaleur de plusieurs variables", Bull. Univ. Etal. Moscow, Ser. Int. Sect. A: Math. et Mecan. Fasc. 9 (1938).

[14] N. WIENER: "The Dirichlet Problem", J. Math. and Phys. vol. 3 (1924), 127-146.

[15] N. WIENER: "Certain notions in Potential Theory", J. Math. and Phys. vol. 3 (1924), 24-51.